higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE SERTIFIKAAT (BEROEPSGERIG)

WISKUNDE

(Eerste vraestel)

NKR VLAK 4

(10501064)

16 November 2020 (X-vraestel)
09:00–12:00

Nieprogrammeerbare wetenskaplike sakrekenaars mag gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 11 bladsye, 2 addenda en 'n formuleblad van 2 bladsye.

010Q1N2016

Kopiereg voorbehou

TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord al die vrae.
2. Lees al die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Laat ten minste DRIE reëls oop na elke vraag.
5. Begin elke vraag op 'n nuwe bladsy.
6. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
7. Rond antwoorde af tot TWEE desimale plekke, tensy anders vermeld.
8. Werk netjies en leesbaar.

Kopiereg voorbehou

VRAAG 1

1.1 Verskeie opsies word as moontlike antwoorde op die volgende vrae gegee. Kies die antwoord en skryf slegs die letter (A–D) langs die vraagnommer (1.1.1–1.1.5) in die ANTWOORDBOEK neer.

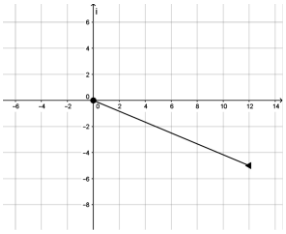
1.1.1 As $z = a + bi$ waar a en b werklike getalle is en $i = \sqrt{-1}$, dan sal die produk $z \times \bar{\bar{z}}$ altyd ... wees.

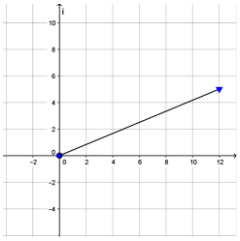
A ongedefinieer
B 'n irrasionale getal
C 'n werklike getal
D 'n imaginêre getal

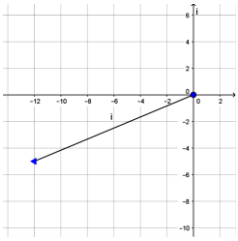
1.1.2 Gegee $i = \sqrt{-1}$. Dan is $\frac{1}{i} = \cdots$

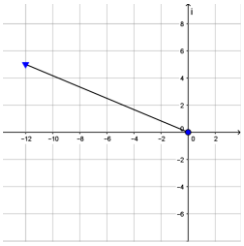
A $\mathbf{1}$
B i
C $-i$
D $1-i$

1.1.3 $12-5i$ op 'n Argand-diagram voorgestel korrespondeer met …

A 

B 

C 

D 

1.1.4 Die komplekse getal $z = -3-4i$ in poolvorm is …

A $5cis126,870°$
B $5cis233,130°$
C $5cis53,130°$
D $5cis306,870°$

1.1.5 Los op vir x en y as $12+6i=-24x+12yi$.

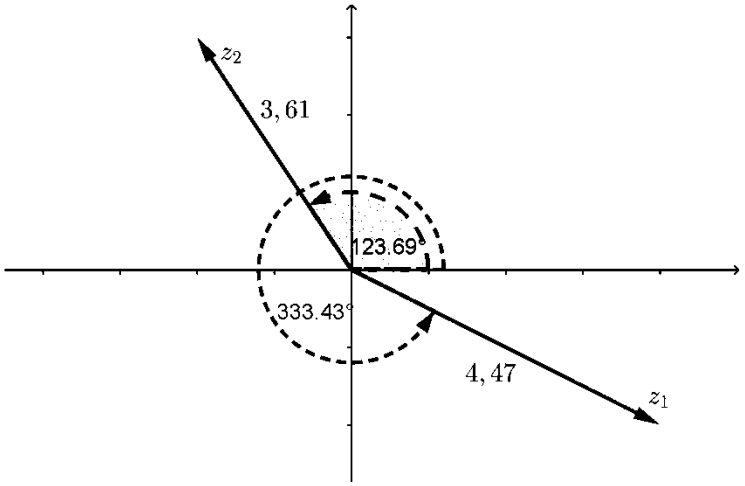
A $x=-2$ and y=2
B $x=-12$ and $y=6$
C $x=-2$ en $y=2i$
D $x=-\frac{1}{2}$ en $y=\frac{1}{2}$

(5 × 1) (5)

1.2 Die Argand-diagram verteenwoordig twee komplekse getalle in die vorm $r\text{cis}\,\theta$.

Gebruik die inligting op die diagram hier onder om vrae 1.2.1 tot 1.2.3 te beantwoord.

Verskeie opsies is gegee as moontlike antwoorde. Kies die antwoord en skryf slegs die letter (A–D) langs die vraagnommer (1.2.1–1.2.3) in die ANTWOORDBOEK neer.



GRAFIEK 1

1.2.1 Die produk van $z_1$en z_2 in poolvorm, met positiewe argument en $0°\le\theta\le360°$, is gelyk aan …

A $16{,}14cis\ 209{,}74$
B $16{,}14cis\ 97{,}12^0$
C $8{,}08cis\ 97{,}12^0$
D $16{,}14cis\ 457{,}12^0$

1.2.2 Gebruik De Moivre se stelling en vereenvoudig $(z_1)^4$ tot poolvorm met positiewe argument waar $0° \le \theta \le 360°$. Die antwoord is gelyk aan …

A $399{,}24cis\ 253{,}72^0$
B $17{,}88cis\ 253{,}72^0$
C $17{,}88cis\ 333{,}43^0$
D $399{,}24cis\ 1333{,}72^0$

1.2.3 $\frac{z_1}{z_2}$ vereenvoudig en in poolvorm met positiewe argument waar $0° \le \theta \le 360°$ is gelyk aan …

A $-0{,}86cis - 209{,}74^0$
B $-0{,}86cis150{,}26^0$
C $1{,}24cis209{,}74^0$
D $-0{,}8cis97{,}12^0$

(3 × 2) (6)

1.3 Vereenvoudig die volgende komplekse uitdrukking en skryf die antwoord in die vorm $a + bi$.

$$\frac{1+i}{i} - \frac{3}{3-i}$$

(3)

1.4 Los op vir x en y in die volgende identiteit en druk alle niewerklike oplossings uit in die vorm $a + bi$.

$$yi^3 + x^2 + 2i^5 = yxi^4 - 20i^8 - 6i$$

(5)
[19]

VRAAG 2

2.1 Gegee $g(x) = -2x^3 - 3x^2 + kx + 20$

Wanneer $-2x^3 - 3x^2 + kx + 20$ is gedeel deur $x + 4$ die res is -56.

Bepaal die waarde van k deur die resstelling toe te pas. (2)

2.2 Gegee: $2x^3 - x^2 - 16x + 15$

2.2.1 Gebruik die faktorstelling om te toon dat $x + 3$ 'n faktor van $2x^3 - x^2 - 16x + 15$ is. (1)

2.2.2 Hieruit, faktoriseer $2x^3 - x^2 - 16x + 15$ volledig. (4)

2.3 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + 13b$ en $g(x) = x^3 + 9x^2 + bx + 7x - a$ is derdegraadse polinome wat by punt $(2; 60)$ sny.

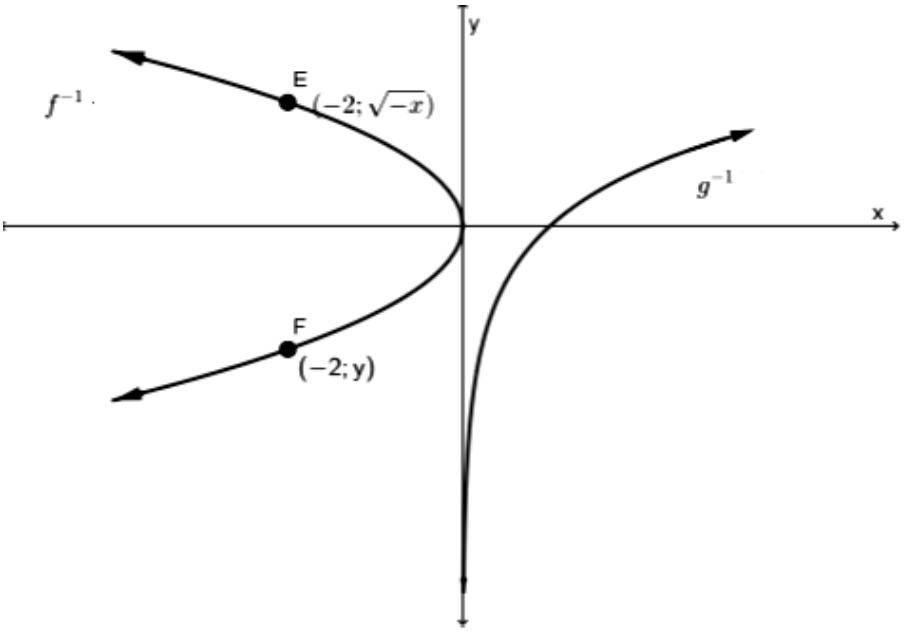
Bepaal die waardes van a en b. (5)

2.4 Gegee $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$ waar $x \epsilon [-4; 2)$ en $x \in \mathbb{R}$

Gebruik ADDENDUM A en teken 'n netjiese grafiek van $f(x)$ and $f^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel. Toon die lyn waarom f^{-1} 'n refleksie is van $f(x)$ en benoem dit. Toon die *x*-afsnitte en *y*-afsnitte duidelik aan en dui aan wat die aard is van die eindpunte wat korrespondeer met die gegewe domein van $f(x)$. (6)

2.5 Bestudeer die grafiek hier onder en beantwoord die vrae. Die grafieke van die INVERSE van f en g is geteken waar

$f(x) = -x^2$ en
$g(x) = 3^x$.



2.5.1 Bepaal die waarde van y by punt $F(-2; y)$ op die grafiek f^{-1} (1)

2.5.2 Skryf die bestek van f neer. (1)

2.5.3 Bepaal die vergelyking van die inverse van f. (1)

2.5.4 Die volgende stellings is ONWAAR. Noem EEN rede om te verduidelik hoekom elkeen onwaar is.

(a) Beide f^{-1} en g^{-1} het asimptote by $x = 0$. (1)

(b) Die inverse van f is 'n funksie. (1)

(c) g^{-1} is dalend in die interval $x \in \{0 < x < \infty\}$ waar $x \in \mathbb{R}$. (1)

(d) Die bestek van g is $y \in \{-\infty < y < \infty\}$ waar $y \in \mathbb{R}$. (1)

[25]

VRAAG 3

3.1 Gegee: die funksie $f(x) = -\frac{3}{x}$. Bepaal die afgeleide van f deur eerste beginsels toe te pas. (3)

3.2 Gebruik differensiasiereëls om die afgeleides van die volgende te bepaal. Gee die antwoord met positiewe eksponente en in wortelvorm waar van toepassing:

3.2.1 $f(x) = 3x^2 + 2\ln x + 4x + 5$ (2)

3.2.2 $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2e^{3x} - \tan 2x - \text{cosec } 3x$ (4)

3.2.3 $y = \frac{x^3 + 3}{x^2 - 3x}$ (3)

3.2.4 $y = \left(x^3 - 5x\right)^5$ (2)

3.3 Gegee $f(x) = 2x^3 - x^2 - 16x + 15$.

3.3.1 Bepaal die y-afsnit van $f(x)$. (1)

3.3.2 $f(x) = 2x^3 - x^2 - 16x + 15$ het draaipunte by $x = 1{,}81$ en $x = -1{,}47$.

Bepaal by watter x-waardes die minimum en maksimum draaipunte voorkom deur die tweede afgeleide reël toe te pas. (3)

3.3.3 Sal die funksie f toeneem of afneem tussen $x = 1{,}81$ en $x = -1{,}47$? (1)

3.3.4 Verifieer jou antwoord op VRAAG 3.3.3 deur die gradiënt van enige $x-$waarde in die interval $-1{,}47 < x < 1{,}81$ where $x \in R$ te bepaal. (2)

3.4 Gegee: $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 4$ en $f(x)$ het 'n draaipunt by $x = 3$.

As $f(x)$ deur $x - 2$ gedeel word, is die res -2 .

Bepaal die waardes van m en n in $f(x)$. (4)

[25]

VRAAG 4

4.1 Bepaal die volgende integrale en vereenvoudig die antwoorde. Gee die antwoord met positiewe eksponente en in wortelvorm waar van toepassing.

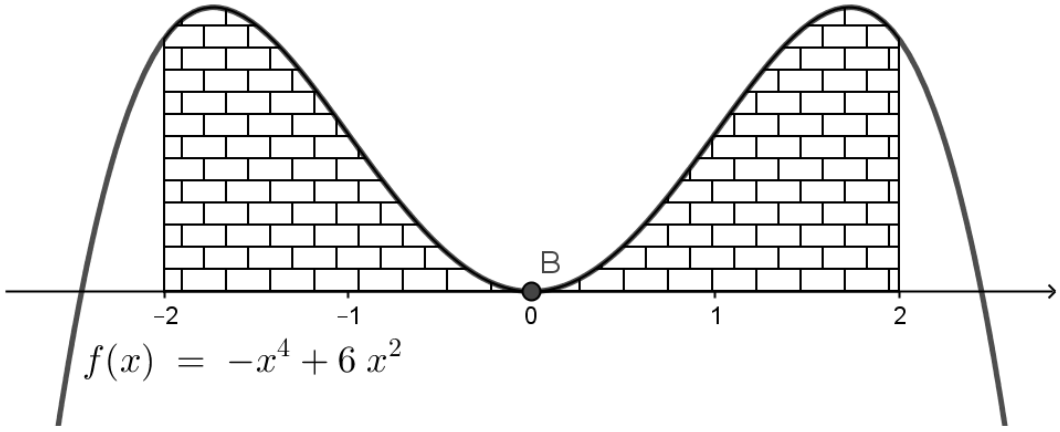
4.1.1 $\int\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{3}x^{-3}+5\cos 5x+4x\right)dx$ (3)

4.1.2 $\int\left(\frac{1}{2x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-e^{3x}+8\sec^2(4x)+5\right)dx$ (5)

4.2 Die vergelyking vir die snelheid van 'n voorwerp is gegee as $v=-3t^2+5t+8$ meter per sekonde, waar t tyd in sekonde is.

Bepaal die afstand afgelê tussen $t=0$ en $t=2$. Los die probleem op deur middel van integrasie. WENK: Die area onder die snelheid-tydgrafiek gee afstand. (3)

4.3 'n Skaatsplankhelling moet gebou word deur gebruik te maak van die funksie $f(x)=-x^4+6x^2$ vir die ontwerp.



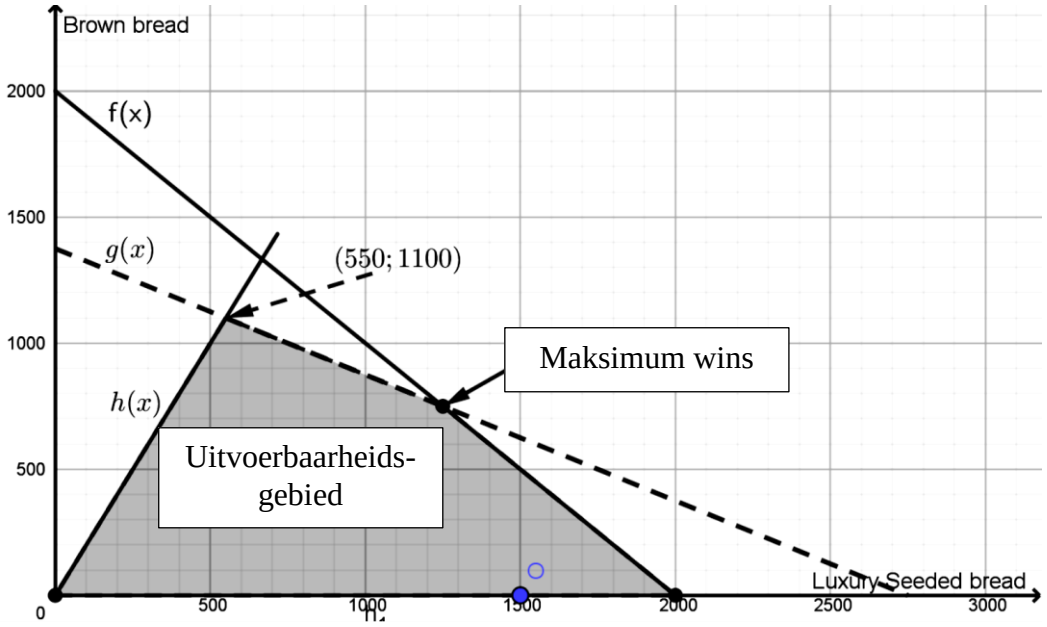
4.3.1 Bepaal die area van die geplaveide deel wat ingesluit is deur die kurwe van $f(x)$, die lyne $x=-2$ en $x=2$, en die x-as. (3)

4.3.2 Gebruik calculus-metodes om die maksimum gradiënt van die helling te bepaal. (2)

[16]

VRAAG 5

5.1 'n Winkel verkoop twee soorte brood, gewone bruinbrood en luukse saadbrood. Die grafiek hier onder toon die wat van toepassing is op die gegewe beperkings. Die luukse saadbrood is hoogstens twee keer so gewild as die gewone bruinbrood. Die funksie $h(x)$ toon die voorkeur-verhouding van luukse saadbrood tot gewone bruinbrood. Gestel x is die getal gewone bruinbrode en y is die getal luukse saadbrode. x en y kan nie negatief wees nie dus $x \geq 0$ en $y \geq 0$



5.1.1 Die funksie $h(x)$ toon die voorkeur-verhouding van luukse saadbrood tot gewone bruinbrood.

Bepaal die vergelyking van die lyn $h(x)$. (2)

5.1.2 Die vergelykings van die ander twee lyne is gegee as $f(x) = 2000 - x$ en $g(x) = 1375 - \frac{1}{2}x$. Skryf die drie beperkings neer wat die uitvoerbaarheidsgebied volledig beskryf. (3)

5.2 'n Snoepwinkel verkoop twee verskillende southappie-borde ('platters'), A en B. Elke bord bevat biltong en neute. Die volgende is die voorwaardes wat op die borde van toepassing is:

- Bord A bevat 200 g biltong en bord B bevat 400 g biltong.
- Die hou op die meeste 8 000 g biltong in voorraad.
- Bord A bevat 400 g neute en Bord B bevat 250 g neute.
- Die winkel het altyd minder as 7 750 g neute in voorraad.
- Die minimum aantal B-borde is 5.

Gestel die getal A-borde is x en die getal B-borde is y.

5.2.1 Twee van die beperkings is $x \geq 0$ en $y \geq 0$.

Modelleer die ander beperkings met betrekking tot die bostaande inligting in terme van x en y. (3)

5.2.2 a) Gebruik 'n skaal van 1 eenheid:5 borde. Stel die ongelykhede grafies voor op die aangehegte ADDENDUM B. (3)

b) Kleur die uitvoerbaarheidsgebied op die grafiek in. (1)

c) Bord A lewer 'n wins van R140 en bord B lewer 'n wins van R160.

Skryf die vergelyking neer wat die totale wins P voorstel. (1)

d) Trek 'n soeklyn op die grafiek om die maksimum wins te vind. (1)

e) Bepaal die maksimum wins. (1)

[15]

TOTAAL: 100

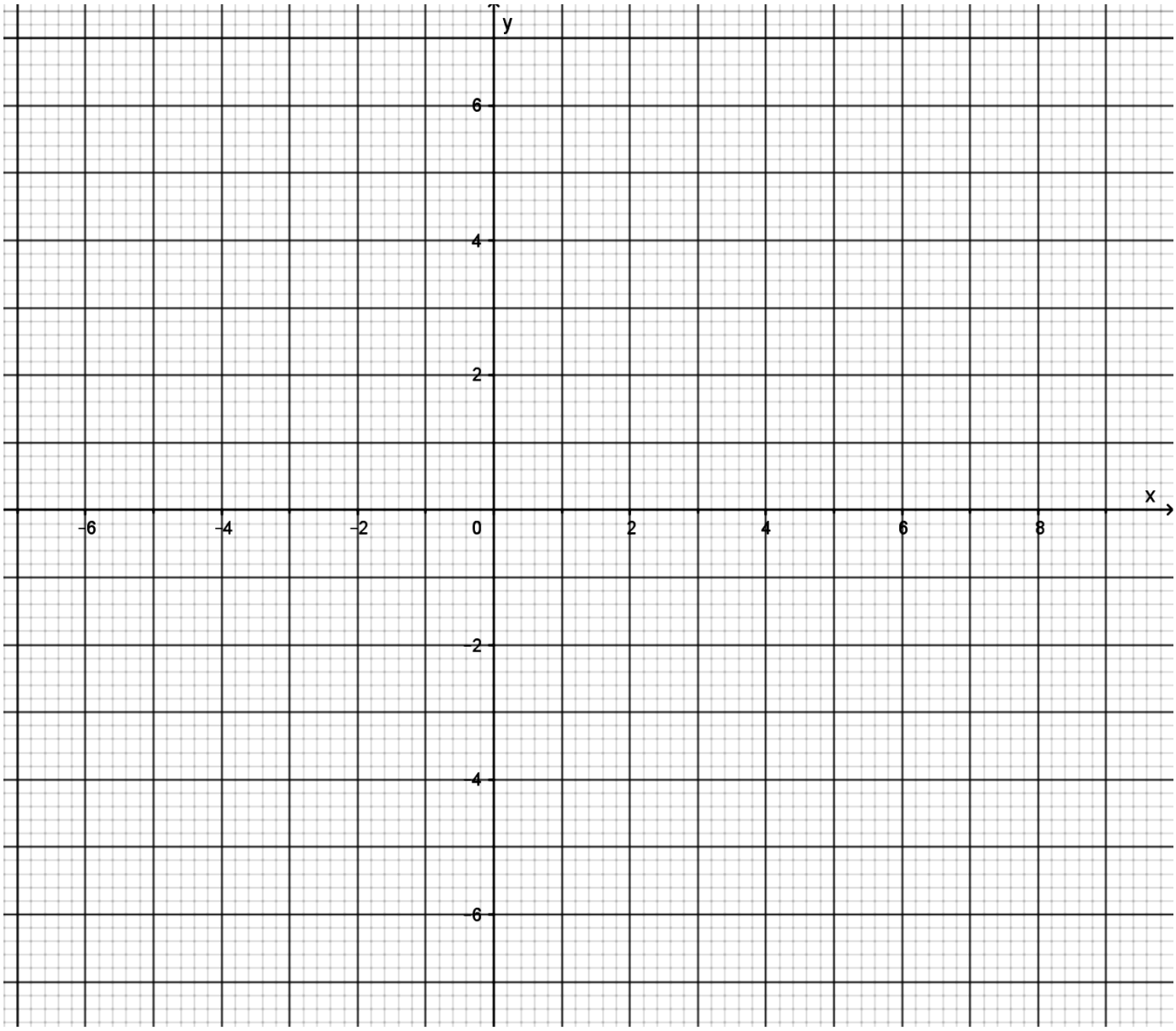
Kopiereg voorbehou

WISKUNDE L4 P1

ADDENDUM A

EKSAMENNOMMER: | | | | | | | | | | | | | |

VRAAG 2.4



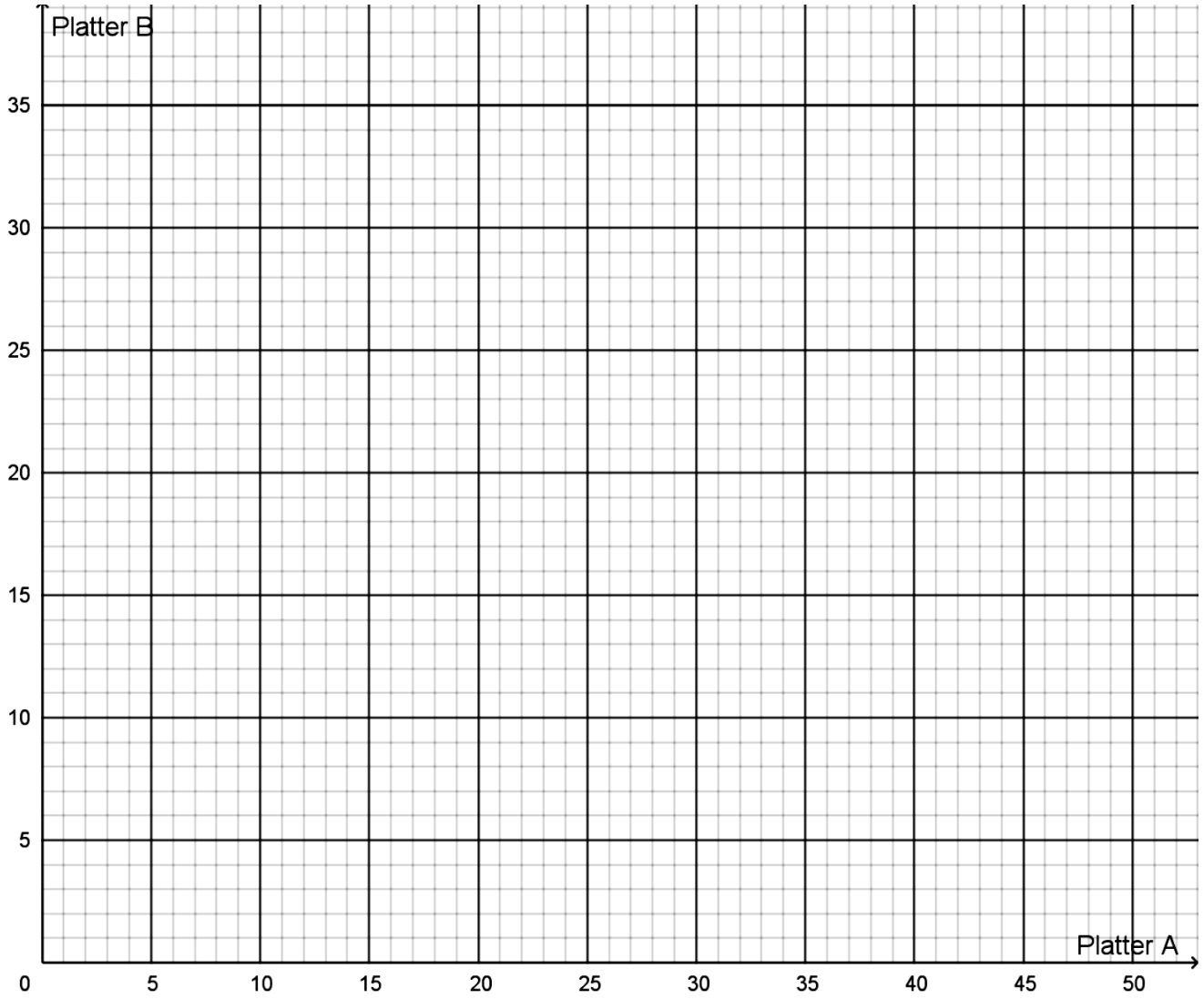
(6)

WISKUNDE L4 P1

ADDENDUM B

EKSAMENNOMMER: | | | | | | | | | | | | | |

VRAAG 5.2.2 (a), (b) en (d)



(3+1+1)

Kopiereg voorbehou

FORMULEBLAD

1. $Z = r\cos\theta + r\ j\sin\theta$

2. $Z = a \pm bj$ or $Z = a \pm bi$ *where* $i = j = \sqrt{-1}$

3. $r \angle \theta = r\ cis\ \theta$

4. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

5. $\dfrac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

6. $y = ka^x = ke^{x \ln a}$

7. $\dfrac{d}{dx} k = 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} = u.\dfrac{dv}{dx} + v.\dfrac{du}{dx}$ or $\dfrac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = f(x)\ g'(x) + f'(x)\ g(x)$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ or $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\ f'(x) - f(x)\ g'(x)}{[g(x)]^2}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \times \dfrac{dy}{du}$ or $\dfrac{d}{dx} f\left(g(x)\right) = f'\left(g(x)\right) g'(x)$

11. As $y = \ln kx$ dan $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{k}{kx}$ or as $f(x) = \ln kx$ dan $f'(x) = \dfrac{k}{kx}$

12. As $y = e^x$ dan $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ or as $f(x) = e^x$ dan $f'(x) = e^x$

13. As $y = e^{kx}$ dan $\dfrac{dy}{dx} = ke^{kx}$ or as $f(x) = e^{kx}$ dan $f'(x) = ke^{kx}$

14. If $y = \sin x$ then $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ or as $f(x) = \sin x$ then $f'(x) = \cos x$

15. If $y = \cos x$ then $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ or if $f(x) = \cos x$ then $f'(x) = -\sin x$

16 If $y = \tan x$ then $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$ or if $f(x) = \tan x$ then $f'(x) = \sec^2 x$

Kopiereg voorbehou

17. If $y = \cot x$ then $\frac{dy}{dx} = -\cos ec^2 x$ or if $f(x) = \cot x$ then $f'(x) = -\cos ec^2 x$

18. If $y = \sec x$ then $\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$ or if $f(x) = \sec x$ then $f'(x) = \sec x \tan x$

19. If $y = \text{cosec } x$ then $\frac{dy}{dx} = -\text{cosec } x \cot x$ or if $f(x) = \text{cosec } x$ then $f'(x) = -\text{cosec } x \cot x$

20. If $y = \ln \sec x$ then $\frac{dy}{dx} = \tan x$ or if $f(x) = \ln \sec x$ then $f'(x) = \tan x$

21. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

22. $\int k\, x^n \, dx = k \int x^n \, dx$ waar k is a constant.

23. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

24. $\int \frac{k}{x} \, dx = k \ln x + c$

25. $\int ka^x dx = \frac{ka^x}{\ln a} + c$

26. $\int e^{kx} \, dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$

27. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

28. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

29. $\int \tan x \, dx = \ln \sec x + c$

30. $\left[f(x) \right]_a^b = f(b) - f(a)$

Kopiereg voorbehou