higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIENRIGLYN

NASIONALE SERTIFIKAAT (BEROEPSGERIG)

WISKUNDE
NKR-VLAK 4
(Eerste vraestel)

9 November 2023

Hierdie nasienriglyn bestaan uit 12 bladsye.

Kopiereg voorbehou

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Nasieners word daaraan herinner dat die vak Wiskunde hom tot verskillende metodes leen en dus verskeie alternatiewe antwoorde moontlik maak. Merk alle wiskundig korrekte antwoorde.

2. Die antwoorde in hierdie nasienriglyn is dus nie volledig nie. Punte word toegeken vir spesifieke beginsels en nasieners moet die puntetoekenning volg.

3. Sien asseblief die vrae na en volg op, bv: 'n Fout in die eerste stap van differensiasie of 'n fout in die omskakeling van wortelvorm na eksponent beteken nie dat die student nie kan onderskei nie. Volg op.

4. Punte word per stap toegeken, maar as 'n student 'n stap weggelaat het en daar bewyse of 'n rede is dat hy/sy by die volgende stap sonder berekening kan aflei, moet die punt steeds aan die student gegee word.

5. Let daarop dat punte toegeken is vir vereenvoudiging. Dit is om te onderskei tussen 'n 80-persenter en 90-persenter.

6. Stappe moet nagesien word en nie net die finale antwoord nie. Regmerkies moet ooreenstem met die totaal. Maak regmerkies en kruisies netjies en leesbaar met net rooi pen.

7. As die antwoord nie presies dieselfde lyk as op die nasienriglyn nie, kan dit wees as gevolg van 'n alternatiewe metode of 'n metode wat jy nie ken nie. Verifieer eers die studente se antwoord.

Kopiereg voorbehou

✓ Volle punt √ Halfpunt A: Akkuraatheid KA: Konsekwente akkuraatheid of opvolg

VRAAG 1

1.1	1.1.1	B		
	1.1.2	D		
	1.1.3	C		
	1.1.4	D		
	1.1.5	B		
		(5 × 1)		(5)

1.2	1.2.1	$z_1 = -4 + 6i$	√ punt reële waarde (A) √ punt denkbeeldige waarde (A)	(1)
	1.2.2	$\sqrt{52}cis\ 123{,}69° \times \sqrt{8}cis\ 315°$ √ $= 4\sqrt{26}cis\ 438{,}69°$ √ $\cong 20{,}4\ cis\ 78\ cis\ 78{,}69°$ √ **OF** $4\sqrt{26}\ \ cis\ 78{,}69°$ ✓	√ punt korrekte lesings (A) √ punt argument nie vereenvoudig √ punt korrekte modulus √ punt korrekte argument binne gegewe interval (KA)	(2)
	1.2.3	$(-4 + 6i) + (2 - 2i) = -2 + 4i$ ✓	$(2 - 2i)$ 1 punt 1 punt korrekte antw KA 1.2.1	(2)

1.3	$\frac{\{1{,}414cis(-45°)\}^5 \times 2\ cis\ 30°}{14{,}422\ cis\ (-33{,}690°)}$ √ $= \frac{5{,}657cis(-225°) \times 2\ cis\ 30°}{14{,}422\ cis\ (-33{,}690°)}$ √ √ $= \frac{11{,}314cis(-195°)}{14{,}422\ cis\ (-33{,}690°)}$ $= 0{,}784\ cis\ (-161{,}31°)$ $= 0{,}784\ cis\ (198{,}69°)$ √ √	√ punt omskakelingsteller (A) √ punt omskakelingsnoemer (A) De Moivre: √ punt modulus (A) √ punt argument (A) Geen punte vir negatiewe argument nie Antwoord: √ punt modulus (KA) √ punt argument (KA) Berekeninge in reghoekige vorm is uitgesluit.	(3)

1.4	$x(x^2 - 6x + 34) = 0$ $\therefore x = 0$ of $x^2 - 6x + 34 = 0$ ✓ $\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(34)}}{2}$ $\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{-100}}{2}$ ✓ $\therefore x = 3 \pm 5i$ ✓	1 punt vir kwadratiese vergelyking en $x = 0$ (A) 1 punt antwoord wat kwadratiese formule (A) toepas 1 punt vir komplekse waardes van x (A)	(3)

1.5	$3 - ix^2y = -(x^2 + y) + 4i$ $-(x^2 + y) = 3 \qquad eq\ 1$ √ $-x^2y = 4 \ \rightarrow\ x^2 = -\frac{4}{y} \qquad eq2$ √ ∴ Vervang in $eq\ 1$ $\frac{4}{y} - y = 3 \ \therefore \ y^2 + 3y - 4 = 0$ ✓ $\therefore y = 1$ √ or $y = -4$ √ $y = 1$ in $eq\ 2 \therefore x^2 = -4 \ \rightarrow \ x = \pm 2i$ √ $y = -4$ in $eq\ 2 \ \rightarrow \ x^2 = -\frac{4}{-4} = 1 \ x = \pm 1$ √	√ punt $eq1$ (A) √ punt $eq2$ (A) 1 punt vir kwadratiese vergelyking √punt elk y √ punt komplekse wortels √ punt reëel	(4)

[20]

VRAAG 2

2.1	Laat $(2x - 1) = 0 \therefore x = \frac{1}{2}$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 28\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 7 = 0$ ✓ ∴ Res $= 0$ ✓ $\therefore (2x - 1)$ is 'n faktor.	1 punt res nul 1 punt antwoord	(2)

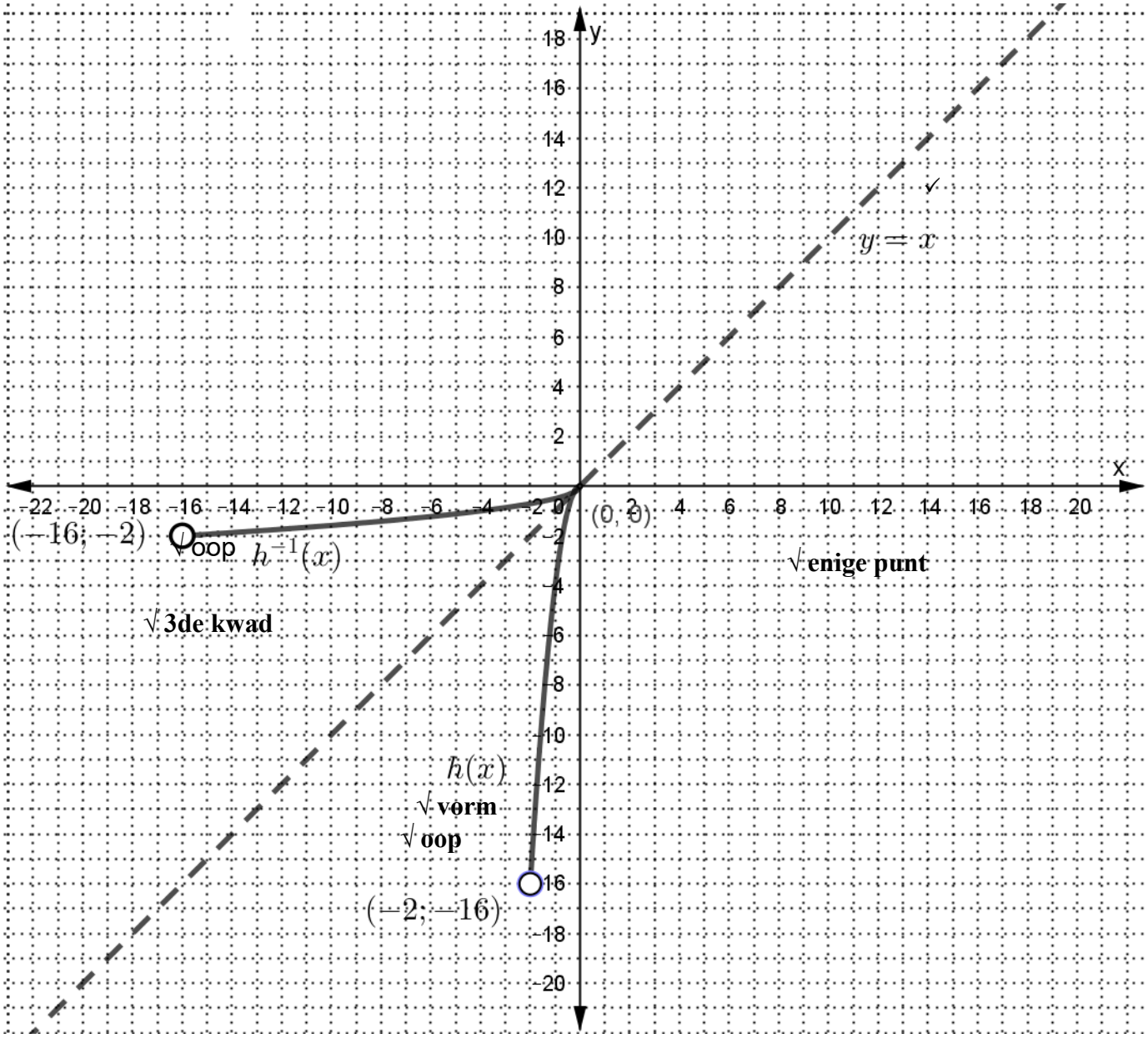
2.2	2.2.1	$x + 1 = 0$ gegee $\therefore x = -1$ $\therefore -2a + b = 1 \qquad eq\ 1$ ✓ $x - 3 = 0$ gegee $\therefore x = 3$ $\therefore -6a + b = -27 \ \ eq\ 2$ ✓ $eq1 - eq2$ $\therefore 4a = 28$ ✓ $\quad \therefore a = 7$ ✓ $\therefore -14 + b = 1 \ \therefore b = 15$	1 punt $eq\ 1$ 1 punt $eq\ 2$ 1 punt antwoord a 1 punt antwoord b	(3)
	2.2.2	Dus $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x + 1)(x - 3)(x + m)$ ✓ $\therefore 15 = -3m$ ✓ $m = -5$		(2)

2.3	2.3.1	$f^{-1} = \{(5;-3);(5;-2);(7;0);(9;2)\}$	(1)
	2.3.2	Niefunksie	(1)
	2.3.3	$x = 7$	(1)
	2.3.4	$5 \leq x \leq 9$ **OF** $x \in [5;9]$	(1)

2.4	2.4.1	$y = \frac{x-4}{2}$ ✓ or $y = \frac{1}{2}x - 2$	Moet wees $y =$…	(1)
	2.4.2	$\{x;\ -4 \leq x < 8; x \in R\}$ √ √ √ √ **OF** $x \in [-4;8)$ met $x \in R$	√ punt min (A) √ punt maks (A) √ punt elke korrekte ongelykheid of hakie (A)	(2)

2.5	2.5.1	$h^{-1}(x)$: $y = \sqrt{\frac{x}{-4}}$ ✓	Slegs punte vir $y =$...	(1)
	2.5.2	$-4x^2 = \sqrt{\frac{x}{-4}}$ $\therefore 16x^4 = \frac{x}{-4}$ √ $\therefore 64x^4 - x = 0$ √ $\rightarrow x(64x^3 - 1) = 0$ √ $\therefore x = 0\ y = 0$ en $x^3 = \frac{1}{64}$ √ $\therefore x = -\frac{1}{4}$ $\rightarrow y = -4\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4}$ √ √ $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$ Positiewe antwoorde word uitgesluit as gevolg van die gegewe domein.	√ punt vergelyk h en h^{-1} √ punt faktorisering √ punt elke ordinaat in $(0;0)$ √ punt elke ordinaat in $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$	(3)

	2.5.3			



√ punt elke oop punt √ punt vir die gebruik van slegs 3de kwadrant √ punt vir geboë vorm van $h(x)$ √ punt $y = x$ √ punt op $y = x$	(3)

[21]

VRAAG 3

3.1	$f(x) = 2x^3 \therefore f(x+h) = 2(x+h)^3$ $= 2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3$ ✓ $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $= \lim_{h\to 0} \frac{2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 2x^3}{h}$ √ $= \lim_{h\to 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3}{h}$ √ $= \lim_{h\to 0} \frac{h(6x^2 + 6xh + 2h^2)}{h}$ √ $= \lim_{h\to 0} 6x^2 + 6xh + 2h^2$ $= 6x^2$ √	Geen punte vir finale antwoord as dit nie uit vorige stappe afgelei kan word nie. 1 punt $f(x+h)$ √ punt korrekte vervanging in eerste beginsels √ punt optelling vereenvoudig √ punt h as algemene faktor geneem √1 punt antwoord	(3)

3.2	3.2.1	$\frac{dy}{dx} = 4x^4 + \frac{1}{2} + 4e^{4x} + 0$ √ √ √ √	√ punt elke term gedifferensieerd	(2)
	3.2.2	$y = 3ln5x - 3\sin 5x - 2x^{-5} + 3x^{\frac{1}{2}}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 \times 5}{5x} - 15\cos 5x + 10x^{-6} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} - 15\cos 5x + \frac{10}{x^6} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ √ √ √ √	√ punt elke term gedifferensieerd stap 1 √ punt elke term in wortel en positiewe eksponent waar van toepassing **LET WEL:** Slegs √ punt vir $-15\cos 5x$ √ punt tot $\frac{dy}{dx}$ in finale antwoord	(4)

	3.2.3	$\frac{dy}{dx} = (2x^3 - 4)^{-4}$ $\frac{dy}{dx} = -4(2x^3 - 4)^{-5}(6x^2)$ ✓ ✓ $\frac{dy}{dx} = \frac{-24x^2}{(2x^3 - 4)^5}$ ✓ **ALTERNATIEF:** Let $u = 2x^3 - 4 \ \therefore \frac{du}{dx} = 6x^2$ √ and $y = u^{-4} \ \therefore \frac{dy}{du} = -4\,u^{-5}$ √ $\therefore \frac{dy}{dx} = -4(2x^3 - 4)^{-5}(6x^2)$ ✓ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-24x^2}{(2x^3 - 4)^5}$ ✓	1 punt is van toepassing $y = f(x)^n$ reël (A) 1 punt d/dx basis (A) 1 punt korrek vereenvoudig met positiewe eksponente (KA) **OF** √ punt du/dx (A) √ punt dy/du basis (A) 1 punt pas kettingreël toe 1 punt korrek vereenvoudig met positiewe eksponente (KA)	(3)

[12]

VRAAG 4

4.1	4.1.1	$\int ydx = 2lnx - \frac{tan5x}{5} + 2e^{2x} + x^2 + 5x + c$ (√ √ √ √ √)	√ punt elke term geïntegreer en halfpunt c	(3)
	4.1.2	$\int ydx = \int \left(4x^{-2} - \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 6\sin 3x\right) dx$ $= \frac{4x^{-1}}{-1} - \frac{5x^{\frac{1}{2}}}{2 \times \frac{1}{2}} - \frac{6}{3}\cos 3x + c$ (√ √ √) $= -\frac{4}{x} - 5\sqrt[2]{x} - 2\cos 3x + c$ (√ √ √) Geen punte vir c in 4.1.2.	√ punt elke term geïntegreer √ punt eerste twee terme in wortel en positiewe eksponent, √ punt negatiewe teken vir $2cos3x$	(3)
	4.1.3	$\int \left(\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)}\right) dx$ $= \int x - 2\ dx$ √ $= \frac{x^2}{2} - 2x + c$ (√)	√ punt vereenvoudig √ punt albei geïntegreerd √ punt c	(2)

4.2	$A_1 = \int_{-1}^{1} -x^3 + 4x^2 + x - 4 = \frac{-x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x \Big\vert_{-1}^{1}$ $= \left[\frac{-1^4}{4} + \frac{4(1)^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 4(1)\right] - \left[\frac{-(-1)^4}{4} + \frac{4(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 4(-1)\right]$ $= -\frac{16}{3} = +5\frac{1}{3}$ √ $A_2 = \int_{1}^{4} -x^3 + 4x^2 + x - 4 = \frac{-x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x \Big\vert_{1}^{4}$ √ $= \left[\frac{-4^4}{4} + \frac{4(4)^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 4(4)\right] - \left[\frac{-1^4}{4} + \frac{4(1)^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 4(1)\right] = 15\frac{3}{4}$ Totale oppervlakte $= 21\frac{1}{12} = 21{,}083\ eenhede^2$	√ punt $A_1 = \int_{-1}^{1} ydx$ (A) korrekte grense √ punt elke integrasie in A_1 √ punt $A_2 = \int_{1}^{4} ydx$ √ punt $-A_1$ (A) √ punt$+A_1$ (KA) √ punt $+A_2$ (A) √ puntA_t(KA)	
			(5)

[13]

VRAAG 5

5.1	5.1.1	$\boldsymbol{s(2) = -(3)^2 + 3(3) + 1}$√ $\therefore\ \boldsymbol{s = 1\ m}$√		√ punt plaasvervanger s' (A) √ punt antwoord (A)	(1)
	5.1.2	(a)	$s'(t) = -2t + 3 = 0$ $\rightarrow 2t = 3$ √ $t = \frac{5}{2}$ s $= 1{,}5$ s $s = -(1{,}5)^2 + 3(1{,}5)$√ $s = 3\frac{1}{4}$ m $= 3{,}25$ m✓	√ punt vir s' (t) (A) √ punt gelyk aan nul (A) √ punt los op t (A) √ punt plaasvervanger in s (KA) 1 punt antwoord (A)	(3)
		(b)	3,25 m − 2,47 m = 0,78 m = 78 cm ✓	√ punt antwoord in meter (KA) √ punt antwoord in cm (A)	(1)
	5.1.3	$s(t) = -(t)^2 + 3(t) + 1 = 0$ √ $\therefore t = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-2}$ √ $\therefore t = -0{,}3$ s en $t = 3{,}302$ s Tyd is nie negatief nie✓ $\therefore\ t = 3{,}302$ s✓		√ punt gelyk aan nul (A) √ punt toepassing van kwadratiese formule 1 punt antwoord Moenie penaliseer as eenhede weggelaat word nie.	(2)

5.2	5.2.1	$f'(x) = 6x^2 + 6x - p = 6x^2 + 6x + 12$ $\therefore p = -12$	1 punt $f'(x)$ 1 punt oplossing	(2)
	5.2.2	$\begin{array}{r\|l} & 2 + 3 - 12 - 20 \\ -2 & \downarrow \quad -4 - \ 2 + 20 \\ \hline & 2 - 1 - 10 \ \lfloor 0 \end{array}$ √ √ √ √ √ √ $\therefore 2x^2 - x - 10 = (x + 2)(2x - 5)(x + 2)$ **ALTERNATIEF:** √ √ √ $\begin{array}{r\|llll} & & 2x^2 & -x & -10 \\ \hline x + 2 & 2x^3 & 3x^2 & -12x & -20 \\ & 2x^3 & 4x^2 & & \\ \hline & 0 & -1x^2 & -12x & \\ & & -1x^2 & -2x & \\ \hline & & 0 & -10x & -20 \\ & & & -10x & -20 \\ \hline & & & 0 & + \ 0 \end{array}$ √ √ $\therefore\therefore 2x^2 - x - 10 = (x + 2)(2x - 5)(x + 2)$ **ALTERNATIEF:** $2x^3 + 3x^2 - 12x - 20 = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$ $\therefore x^3$: $2x^3 = ax^3 \therefore a = 2$ √ Konstante $- 20 = 2 \times c \ \therefore c = -10$ √ $x^2 : + 2ax^2 + bx^2 = 3x^2$ √ $\therefore 4x^2 + bx^2 = 3x^2$ $\therefore \quad b = -1$ $\therefore 2x^2 - x - 10 = (2x - 5)(x + 2)$ √ √ √ $2x^2 - x - 10 = (x + 2)(2x - 5)(x + 2)$	In $ax^2 + bx + c$ √ punt a √ punt b √ punt c √ punt elke faktor	(3)

5.3	5.3.1	$g(x) = 2x^3 - 7x^2 - 14x + 40$ $\therefore g'(x) = 6x^2 - 14x - 14$ √ √ √ $\therefore g'(-2) = 6(-2)^2 - 14(-2) - 14 = 38$ √ $g'(1) = 6(1)^2 - 14(1) - 14 = -22$	√ punt elke afgeleide in g' √ punt korrekte gebruik van (-2) √ punt elke gradiënt	(3)
	5.3.2	Gradiënt verander van positief na negatief. √ √ ∴ Daar is 'n maksimum draaipunt. √ √	√ punt elke antwoord wat verandering in die rigting van kurwe aandui √ punt maksimum √ punt keerpunt	(2)

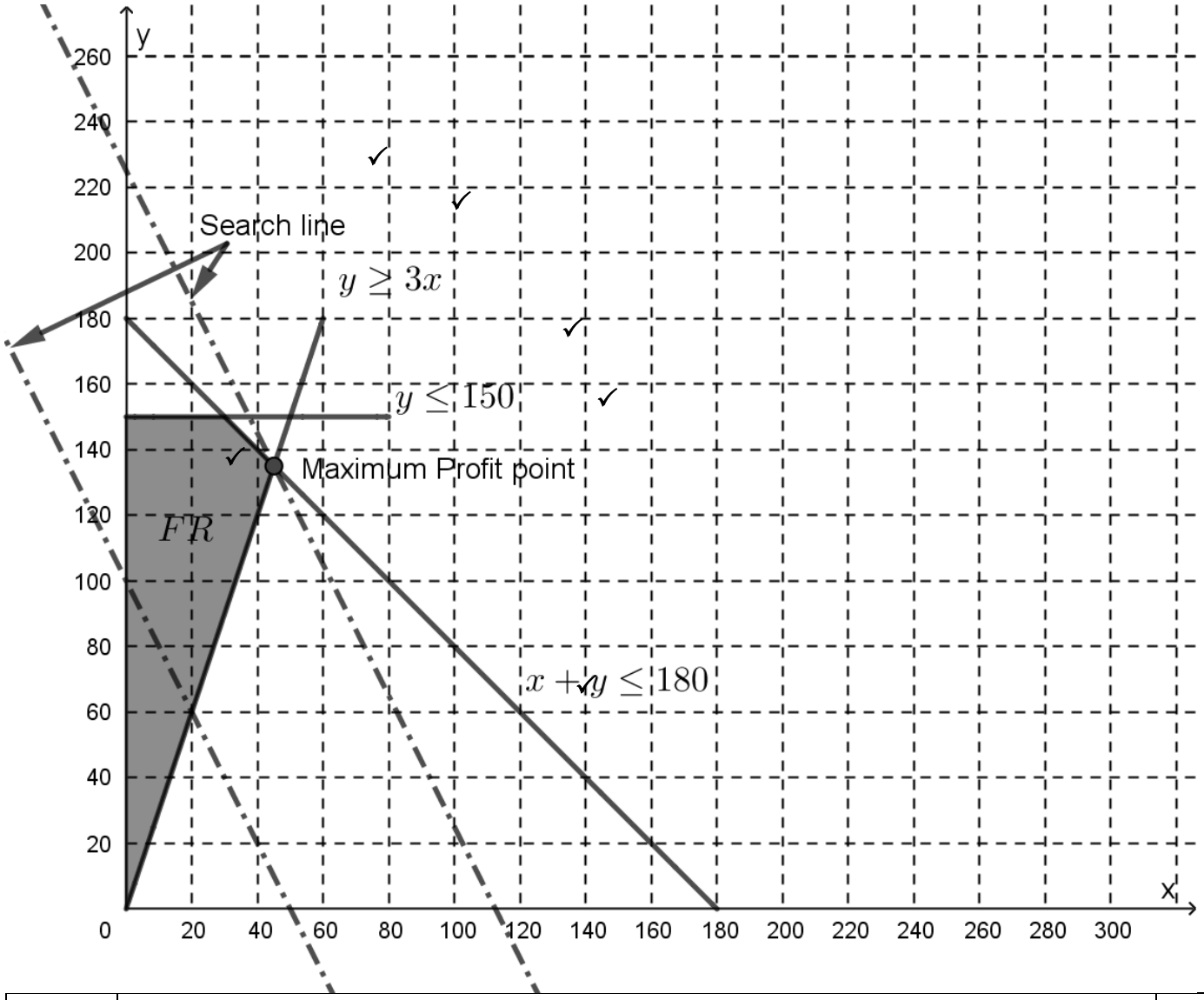
	5.3.3	$g''(x) = 12x - 14 = 0$ $\therefore x = \frac{14}{12} = 1\frac{1}{6} = 1{,}167$ $\therefore\ y = \frac{143}{3} = 17{,}33 \therefore POI = (1{,}167; 17{,}33)$ √	√ punt g" (A) √ punt gelyk aan nul (A) √ punt los op x (A) √ punt los op y (KA)	(2)

[19]

VRAAG 6

6.1	6.1.1	a)	(10; 2)✓		(1)
		b)	**Toets in $3x + 2y \leq 30$** $\therefore \mathbf{3(10) + 2(2) = 34 \rightarrow 34 > 30}$ ✓ Dit voldoen nie aan hierdie beperking nie, want die antwoord is groter as 30.		(1)
	6.1.2	$\boldsymbol{P = Q(x) + T(y)}$ **Gegee $43 = 4Q + 9T$ eq 1** √ **$35 = 5Q + 5T$ eq 2** √ $eq1 \times 5 \rightarrow 215 = 20Q + 45\,T \rightarrow eq3$ $eq2 \times 4 \rightarrow 140 = 20Q + 20\,T \rightarrow eq4$ $\therefore eq3 - eq4 \rightarrow 75 = 25\,T$ $\therefore T = 3$✓ Vervang in eq 2 $\therefore 5Q = 20 \therefore Q = 4$✓	√ punt eq 1 (A) √ punt eq 2 (A) 1 punt los op T (A) 1 punt los op Q (KA)	(3)

6.2	6.2.1	$P = 1\,600x + 800y$	(A)	(1)
	6.2.2	$y \leq 150$ ✓ $x \leq \frac{1}{3}y$ $\therefore y \geq 3x$ √ √ $x + y \leq 180$ √ √	√ punt elke korrekte ongelykheidsteken (A) √ punt elke korrekte vergelyking (A)	(3)
	6.2.3			



(a)	1 punt $x + y = 180$	
(b)	1 punt $y = 3x$ 1 punt $y = 150$ 1 punt uitvoerbaarheidsgebied	
(c)	1 punt wat die korrekte maksimumpunt wys en 1 punt wat die soeklyn by die maksimumpunt wys.	(6)

[15]

TOTAAL: 100

Kopiereg voorbehou