higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N6

(16030186)

16 November 2022 (X-vraestel)
09:00–12:00

Wetenskaplike sakrekenaars mag gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye en 'n formuleblad van 7 bladsye.

Kopiereg voorbehou

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N6
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord al die vrae.
2. Lees al die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Begin elke afdeling op 'n nuwe bladsy.
5. Gebruik slegs 'n swart of 'n blou pen.
6. Skryf netjies en leesbaar.

Kopiereg voorbehou

VRAAG 1

1.1 Gegewe: $Q=(x+y)\ln\left(\frac{x}{y}\right)$, toon dat

$$x\frac{\partial Q}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial y}=Q$$ (3)

1.2 Indien $z=3x^2y^5$, bepaal die veranderingstempo van z wanneer x 3 eenhede en y 2 eenhede is, terwyl x teen 5 eenhede/s afneem en y teen 2,5 eenhede/s toeneem. (3)

[6]

VRAAG 2

Bepaal $\int ydx$ indien:

2.1 $y=-2xcosec^2 2x$ (2)

2.2 $y=x^3cosx$ (5)

2.3 $y=\frac{1}{(x+1)(x+4)}$ (4)

2.4 $y=\sin^5 3x$ (5)

2.5 $y=5xe^{-2x}$ (2)

[18]

VRAAG 3

Gebruik parsieelbreuke om die volgende integrale te bereken:

3.1 $\int\frac{x^3+6x-7}{\left(x^2-2x-3\right)^2}dx$ (6)

3.2 $\int\frac{x^2}{(1-x)\left(x^2+1\right)}dx$ (6)

[12]

VRAAG 4

4.1 Bepaal die algemene oplossing van:

$$(t-1)^3\frac{ds}{dt}+4(t-1)^2 s=t+1$$ (5)

4.2 Bepaal die partikuliere oplossing van:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+4\frac{ds}{dt}+13s=39t^2+11t+54 \text{ wanneer } t=0;\ s=1 \text{ en } \frac{ds}{dt}=8 \text{ wanneer } t=0.$$ (7)

[12]

VRAAG 5

5.1 5.1.1 Maak 'n netjiese skets van grafiek $y=\sin 2x$. Toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die volume te bereken indien die oppervlakte wat deur die grafiek en die ordinate $y=0$ begrens is en $x=\frac{\pi}{2}$ om die x-axis roteer. (2)

5.1.2 Bereken die volume wat gegenereer word indien die oppervlakte wat in VRAAG 5.1.1 beskryf is om die x-axis roteer. (3)

5.1.3 Bereken die volumemoment om die y-as asook die afstand vanaf die ewewigspunt vanaf die y-as. (5)

5.2 5.2.1 Bereken die snypunte van die twee krommes $y=2x$ en $y=x^2$. Maak 'n netjiese skets van die twee krommes en toon die oppervlakte wat deur die twee krommes begrens is. Toon die verteenwoordigende strook/element PARALLEL aan die x-as wat jy sal gebruik om die oppervlakte wat deur die krommes begrens word, te bereken. (3)

5.2.2 Bereken die oppervlakte wat deur die twee krommes wat in VRAAG 5.2.1 beskryf is, begrens word. (3)

5.2.3 Bereken die tweede oppervlaktemoment wanneer die oppervlakte wat deur die twee krommes wat in VRAAG 5.2.1 beskryf is, om die x-as roteer. (4)

5.2.4 Druk die antwoord in VRAAG 5.2.3 ten opsigte van oppervlakte uit. (1)

5.3 5.3.1 Maak 'n netjiese skets van die grafiek $y=-x^2+x$ en toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die volume van die solied wat gegenereer word te bereken wanneer die oppervlakte wat deur die kromme en lyn $y=0$ gegenereer word om die x-as roteer. (2)

5.3.2 Berekende die volume wat in VRAAG 5.3.1 beskryf is. (3)

5.3.3 Bereken die inersiemoment van die solied wat verkry is wanneer die oppervlakte wat in VRAAG 5.3.1 beskryf is, om die x-as roteer. (4)

Kopiereg voorbehou

5.4 5.4.1 'n Vertikale sluis in die vorm van 'n parabool word in 'n damwal geplaas. Die bokant van die sluis is 8 m wyd en is 1 m onder die watervlak. Die sluis is 4 m hoog.

Maak 'n netjiese skets van die sluis en toon die verteenwoordigende strook/element wat jy sal gebruik om die eerste en tweede oppervlaktemoment van die sluis om die watervlak te bereken.

Bereken die verhouding tussen die twee veranderlikes x en y. (3)

5.4.2 Gebruik integrasie om die oppervlaktemoment van die keermuur om die watervlak in VRAAG 5.4.1 te bereken. (3)

5.4.3 Gebruik integrasie om die tweede oppervlaktemoment van die keermuur wat in VRAAG 5.4.1 beskryf is, om die watervlak en die diepte van die drukmiddelpunt op die keermuur te bereken. (4)

[40]

VRAAG 6

6.1 Bereken die lengte van die krommes $x = 3\cos t - \cos 3t$ en $y = 3\sin t - \sin 3t$ vir $0 \le t \le \pi$. (6)

6.2 Bereken die buiteoppervlakte wat gegenereer word wanneer die kromme wat deur $y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ van $x = 0$ tot $x = 2$ gegee word, om die x-as roteer. (6)

[12]

TOTAAL: 100

Kopiereg voorbehou

WISKUNDE N6

FORMULEBLAD

Enige ander toepaslike formule mag ook gebruik word.

Trigonometrie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$\sin^2 A = ½ - ½ \cos 2A$

$\cos^2 A = ½ + ½ \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$\sin A \cos B = ½ [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = ½ [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = ½ [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = ½ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \sin x = \frac{1}{\text{cosec } x}; \quad \cos x = \frac{1}{\sec x}$$

Kopiereg voorbehou

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
ax^n	$a \frac{d}{dx} x^n$	$a \int x^n \, dx$
e^{ax+b}	$e^{ax+b} . \frac{d}{dx} (ax + b)$	$\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}(ax+b)} + C$
a^{dx+e}	$a^{dx+e} . \ln a . \frac{d}{dx} (dx + e)$	$\frac{a^{dx+e}}{\ln a . \frac{d}{dx}(dx+e)} + C$
$\ln(ax)$	$\frac{1}{ax} . \frac{d}{dx} ax$	$x \ln ax - x + C$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \frac{d}{dx} f(x)$	-
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} . \ln a . \frac{d}{dx} f(x)$	-
$\ln f(x)$	$\frac{1}{f(x)} . \frac{d}{dx} f(x)$	-
$\sin ax$	$a \cos ax$	$-\frac{\cos ax}{a} + C$
$\cos ax$	$-a \sin ax$	$\frac{\sin ax}{a} + C$
$\tan ax$	$a \sec^2 ax$	$\frac{1}{a} \ln [\sec (ax)] + C$
$\cot ax$	$-a \operatorname{cosec}^2 ax$	$\frac{1}{a} \ln [\sin (ax)] + C$
$\sec ax$	$a \sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a} \ln [\sec ax + \tan ax] + C$
$\operatorname{cosec} ax$	$-a \operatorname{cosec} ax \cot ax$	$\frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{ax}{2} \right) \right] + C$

Kopiereg voorbehou

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin f(x)$	$\cos f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\tan f(x)$	$\sec^2 f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\cot f(x)$	$-\text{cosec}^2 f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\sec f(x)$	$\sec f(x)\tan f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\text{cosec}\, f(x)$	$-\text{cosec}\, f(x)\cot f(x)\,.\,f'(x)$	-
$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\cos^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	-
$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\cot^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2+1}$	-
$\sec^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\text{cosec}^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	-
$\sin^2(ax)$	-	$\frac{x}{2}-\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\cos^2(ax)$	-	$\frac{x}{2}+\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\tan^2(ax)$	-	$\frac{1}{a}\tan(ax)-x+C$

Kopiereg voorbehou

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)\,dx$

$\cot^2(ax)$ - $-\frac{1}{a}\cot(ax) - x + C$

$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

$\int [f(x)]^n\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + C$

$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a} + C$

$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx = \frac{a^2}{2b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$

$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a + bx}{a - bx}\right) + C$

$\int \sqrt{x^2 \pm b^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm b^2}\right] + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b}\ln\left[bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right] + C$

TOEPASSINGS VAN INTEGRASIE

OPPERVLAKTE

$A_x = \int_a^b y\,dx\,;\; A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$

$A_y = \int_a^b x\,dy\,;\; A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\,dy$

Kopiereg voorbehou

VOLUME

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx\,;V_x = \pi\int_a^b\left(y_1^2 - y_2^2\right)dx\,;V_x = 2\pi\int_a^b xydy$$

$$V_y = \pi\int_a^b x^2dy\,;V_y = \pi\int_a^b\left(x_1^2 - x_2^2\right)dy\,;V_y = 2\pi\int_a^b xydx$$

OPPERVLAKTEMOMENTE

$$A_{m-x} = \int_a^b rdA \qquad A_{m-y} = \int_a^b rdA$$

SENTROÏED

$$\bar{x} = \frac{A_{m-y}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}\,;\bar{y} = \frac{A_{m-x}}{A} = \frac{\int_a^b rdA}{A}$$

TWEEDE OPPERVLAKTEMOMENT

$$I_x = \int_a^b r^2dA \quad ; \quad I_y = \int_a^b r^2dA$$

VOLUMEMOMENTE

$$V_{m-x} = \int_a^b rdV \quad ; \quad V_{m-y} = \int_a^b rdV$$

EWEWIGSPUNT

$$\bar{x} = \frac{v_{m-y}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V}\;; \quad \bar{y} = \frac{v_{m-x}}{V} = \frac{\int_a^b rdV}{V}$$

INERSIEMOMENTE

Massa = Digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: I = m r2

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$

SIRKULÊRE LAMINA

$$I_z = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_a^b r^2 dV$$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho\pi \int_a^b y^4 dx \qquad I_y = \frac{1}{2} \rho\pi \int_a^b x^4 dy$$

VLOEITSTOFDRUKMIDDELPUNT

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\int_a^b r^2 dA}{\int_a^b r dA}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \ldots \frac{Z}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^3 (cx+d)^3} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(cx+d)} + \frac{E}{(cx+d)^2} + \frac{F}{(cx+d)^3}$$

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^n} = \frac{Ax+F}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{dx+e} + \frac{C}{(dx+e)^2} + \ldots + \frac{Z}{(dx+e)^n}$$

$$A_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A_x = \int_d^c 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A_y = \int_d^c 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Kopiereg voorbehou

$$A_x = \int_{1\,u}^{u2} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$A_y = \int_{u1}^{u2} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \therefore \quad ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx$$

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad r_1 \neq r_2$$

$$y = e^{rx}(A + Bx) \quad r_1 = r_2$$

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx] \quad r = a \pm ib$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$

Kopiereg voorbehou