higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

# NASIONALE SERTIFIKAAT

# WISKUNDE N6

(16030186)

**22 November 2023 (X-vraestel)**
**09:00–12:00**

**Wetenskaplike sakrekenaars mag gebruik word.**

**Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye en 'n formuleblad van 7 bladsye.**

051Q1E2322

Kopiereg voorbehou

# DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
# REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N6
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

---

**INSTRUKSIES EN INLIGTING**

1. Beantwoord al die vrae.
2. Lees al die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Begin elke afdeling op 'n nuwe bladsy.
5. Gebruik slegs 'n swart of 'n blou pen.
6. Skryf netjies en leesbaar.

---

Kopiereg voorbehou 

## VRAAG 1

1.1 Indien $z = e^{xy} \ln y$

Bewys dat $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (4)

1.2 Gegee: $y = \sqrt{3t}$ en $x = -\sqrt{t+1}$

Bepaal $\frac{dy}{dx}$. (2)

**[6]**

## VRAAG 2

Bepaal $\int y dx$ indien:

2.1 $y = \frac{1}{8 - 2x - x^2}$ (4)

2.2 $y = e^{-x} \cos x$ (4)

2.3 $y = \tan^5 3x$ (5)

2.4 $y = \cos^5 \pi x \sin^3 \pi x$ (4)

2.5 $y = \sin^2\left(\frac{3x}{5}\right)$ (1)

**[18]**

## VRAAG 3

Gebruik parsieelbreuke om die volgende te integreer:

3.1 $\int \frac{2x^2 - 7x - 12}{x(x+2)(x-3)} dx$ (5)

3.2 $\int \frac{x^3 + 4x + 9}{x^2 - x - 6} dx$ (7)

**[12]**

**VRAAG 4**

4.1 Bepaal die partikuliere oplossing van:

$$(t+1)\frac{ds}{dt}+2s=3(t+1)+\frac{1}{(t+1)^2} \text{ waar } t=4 \text{ wanneer } s=2$$

(6)

4.2 Bepaal die algemene oplossing van:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=x^2$$

(6)
**[12]**

**VRAAG 5**

5.1 5.1.1 Maak 'n netjiese skets van die grafiek van $y=3x-x^2$ en toon die verteenwoordigende strook/element wat 'n mens sal gebruik om die volume van die ruimteliggaam te bereken wat gegenereer word wanneer die oppervlakte wat deur die kromme en die lyn $y=0$ begrens word, om die $y$-as roteer. (2)

5.1.2 Bereken die volume wat gegenereer word indien die oppervlakte wat in VRAAG 5.1.1 beskryf is, om die $y$-as roteer. (4)

5.2 5.2.1 Bereken die snypunte van die twee krommes $y=x+6$ en $y=x^2$. Maak 'n netjiese skets van die twee krommes en toon die oppervlakte wat deur die krommes begrens word. Toon die verteenwoordigende strook/element LOODREG op die $x$-as wat 'n mens sal gebruik om die oppervlakte te bereken wat die krommes en die $y$-as in die eerste kwadrant begrens. (3)

5.2.2 Bereken die oppervlakte wat deur die krommes in VRAAG 5.2.1 beskryf is, begrens word. (3)

5.2.3 Bereken die tweede oppervlaktemoment wanneer die oppervlakte wat deur die krommes wat in VRAAG 5.2.1 beskryf is, om die $y$-as geroteer word. (4)

5.2.4 Druk die antwoord in VRAAG 5.2.3 ten opsigte van oppervlakte uit. (1)

5.3 5.3.1 Bereken die snypunt van $y=\sin x$ en $y=\cos x$.

Maak 'n netjiese skets van die grafieke en dui die gebied wat deur die grafieke vir $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ begrens word, duidelik aan. Toon die verteenwoordigende strook/element wat 'n mens sal gebruik om die volume te bereken van die ruimteliggaam wat gegenereer word wanneer die oppervlakte wat deur die grafieke vir $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ begrens word, om die $x$-as roteer. (3)

5.3.2 Berekende die volume wat in VRAAG 5.3.1 beskryf is. (4)

5.3.3 Bereken die inersiemoment van die ruimteliggaam wat verkry word wanneer die oppervlakte wat in VRAAG 5.3.1 beskryf is, om die $x$-as roteer. (5)

Kopiereg voorbehou 

5.4 5.4.1 'n Vertikale stuplaat in 'n reghoekige kanaal is 8 m wyd en 4 m hoog. Die bokant van die stuplaat is 1 m onder die wateroppervlak.

Maak 'n netjiese skets van die stuplaat en toon die verteenwoordigende strook/element wat 'n mens vir berekeninge sal gebruik. (2)

5.4.2 Bereken, deur integrasie te gebruik, die oppervlaktemoment van die stuplaat om die watervlak in VRAAG 5.4.1. (4)

5.4.3 Bereken, deur integrasie te gebruik, die tweede oppervlaktemoment van die stuplaat wat in VRAAG 5.4.1 beskryf is om die watervlak, asook die diepte van die drukmiddelpunt van die stuplaat. (5)

**[40]**

**VRAAG 6**

6.1 Bereken die lengte van die kromme $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ vanaf $x=0$ na $x=2$. (6)

6.2 Bereken die buiteoppervlakte wat gegenereer word wanneer die krommes $x=\ln\left(\sec t+\tan t\right)-\sin t$ en $y=\cos t$ vanaf $t=0$ tot $t=\frac{\pi}{3}$ om die $x$-axis geroteer word. (6)

**[12]**

**TOTAAL: 100**

Kopiereg voorbehou

**WISKUNDE N6**

**FORMULEBLAD**

Enige ander toepaslike formule mag ook gebruik word.

**Trigonometrie**

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$\sin^2 A = ½ - ½ \cos 2A$

$\cos^2 A = ½ + ½ \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$\sin A \cos B = ½ [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = ½ [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = ½ [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = ½ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \sin x = \frac{1}{\text{cosec}\, x}; \quad \cos x = \frac{1}{\sec x}$$

Kopiereg voorbehou 

| $f(x)$ | $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|---|
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ |
| $ax^n$ | $a \frac{d}{dx} x^n$ | $a \int x^n \, dx$ |
| $e^{ax+b}$ | $e^{ax+b} . \frac{d}{dx} (ax + b)$ | $\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}(ax+b)} + C$ |
| $a^{dx+e}$ | $a^{dx+e} . \ln a . \frac{d}{dx} (dx + e)$ | $\frac{a^{dx+e}}{\ln a . \frac{d}{dx}(dx+e)} + C$ |
| $\ln(ax)$ | $\frac{1}{ax} . \frac{d}{dx} ax$ | $x \ln ax - x + C$ |
| $e^{f(x)}$ | $e^{f(x)} \frac{d}{dx} f(x)$ | - |
| $a^{f(x)}$ | $a^{f(x)} . \ln a . \frac{d}{dx} f(x)$ | - |
| $\ln f(x)$ | $\frac{1}{f(x)} . \frac{d}{dx} f(x)$ | - |
| $\sin ax$ | $a \cos ax$ | $-\frac{\cos ax}{a} + C$ |
| $\cos ax$ | $-a \sin ax$ | $\frac{\sin ax}{a} + C$ |
| $\tan ax$ | $a \sec^2 ax$ | $\frac{1}{a} \ln [\sec (ax)] + C$ |
| $\cot ax$ | $-a \operatorname{cosec}^2 ax$ | $\frac{1}{a} \ln [\sin (ax)] + C$ |
| $\sec ax$ | $a \sec ax \tan ax$ | $\frac{1}{a} \ln [\sec ax + \tan ax] + C$ |
| $\operatorname{cosec} ax$ | $-a \operatorname{cosec} ax \cot ax$ | $\frac{1}{a} \ln \left[ \tan \left( \frac{ax}{2} \right) \right] + C$ |

Kopiereg voorbehou 

| $f(x)$ | $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|---|
| $\sin f(x)$ | $\cos f(x) \,.\, f'(x)$ | - |
| $\cos f(x)$ | $-\sin f(x) \,.\, f'(x)$ | - |
| $\tan f(x)$ | $\sec^2 f(x) \,.\, f'(x)$ | - |
| $\cot f(x)$ | $-\text{cosec}^2 f(x) \,.\, f'(x)$ | - |
| $\sec f(x)$ | $\sec f(x) \tan f(x) \,.\, f'(x)$ | - |
| $\text{cosec}\, f(x)$ | $-\text{cosec}\, f(x) \cot f(x) \,.\, f'(x)$ | - |
| $\sin^{-1} f(x)$ | $\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$ | - |
| $\cos^{-1} f(x)$ | $\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$ | - |
| $\tan^{-1} f(x)$ | $\frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}$ | - |
| $\cot^{-1} f(x)$ | $\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2+1}$ | - |
| $\sec^{-1} f(x)$ | $\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$ | - |
| $\text{cosec}^{-1} f(x)$ | $\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$ | - |
| $\sin^2(ax)$ | - | $\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$ |
| $\cos^2(ax)$ | - | $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$ |
| $\tan^2(ax)$ | - | $\frac{1}{a}\tan(ax) - x + C$ |

Kopiereg voorbehou

| $f(x)$ | $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|---|

$\cot^2(ax)$ - $-\frac{1}{a}\cot(ax) - x + C$

$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

$\int [f(x)]^n\, f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + C$

$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\frac{bx}{a} + C$

$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx = \frac{a^2}{2b}\sin^{-1}\frac{bx}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - b^2x^2} + C$

$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a + bx}{a - bx}\right) + C$

$\int \sqrt{x^2 \pm b^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm b^2} \pm \frac{b^2}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm b^2}\right] + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{b}\ln\left[bx + \sqrt{b^2x^2 \pm a^2}\right] + C$

**TOEPASSINGS VAN INTEGRASIE**

**OPPERVLAKTE**

$A_x = \int_a^b y\,dx;\ A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$

$A_y = \int_a^b x\,dy;\ A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\,dy$

Kopiereg voorbehou 

**VOLUME**

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \; ; V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx \; ; V_x = 2\pi \int_a^b xy dy$$

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy \; ; V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy \; ; V_y = 2\pi \int_a^b xy dx$$

**OPPERVLAKTEMOMENTE**

$$A_{m-x} = \int_a^b r dA \qquad A_{m-y} = \int_a^b r dA$$

**SENTROÏED**

$$\bar{x} = \frac{A_{m-y}}{A} = \frac{\int_a^b r dA}{A} \; ; \bar{y} = \frac{A_{m-x}}{A} = \frac{\int_a^b r dA}{A}$$

**TWEEDE OPPERVLAKTEMOMENT**

$$I_x = \int_a^b r^2 dA \quad ; \quad I_y = \int_a^b r^2 dA$$

**VOLUMEMOMENTE**

$$V_{m-x} = \int_a^b r dV \quad ; \quad V_{m-y} = \int_a^b r dV$$

**EWEWIGSPUNT**

$$\bar{x} = \frac{v_{m-y}}{V} = \frac{\int_a^b r dV}{V} \; ; \quad \bar{y} = \frac{v_{m-x}}{V} = \frac{\int_a^b r dV}{V}$$

**INERSIEMOMENTE**

Massa = Digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: I = m r2

**ALGEMEEN:** $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$

**SIRKULÊRE LAMINA**

$$I_z = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_a^b r^2 dV$$

$$I_x = \frac{1}{2} \rho\pi \int_a^b y^4 dx \qquad I_y = \frac{1}{2} \rho\pi \int_a^b x^4 dy$$

**VLOEITSTOFDRUKMIDDELPUNT**

$$\bar{\bar{y}} = \frac{\int_a^b r^2 dA}{\int_a^b r dA}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \ldots \frac{Z}{(ax+b)^n}$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)^3\,(cx+d)^3} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \frac{D}{(cx+d)} + \frac{E}{(cx+d)^2} + \frac{F}{(cx+d)^3}$$

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)^n} = \frac{Ax+F}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{dx+e} + \frac{C}{(dx+e)^2} + \ldots + \frac{Z}{(dx+e)^n}$$

$$A_x = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A_x = \int_d^c 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$A_y = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$A_y = \int_d^c 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Kopiereg voorbehou 

$$A_x = \int_{1\,u}^{u2} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$A_y = \int_{u1}^{u2} 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy$$

$$S = \int_{u1}^{u2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\ du$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \therefore \quad ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx} dx$$

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \quad r_1 \neq r_2$$

$$y = e^{rx}(A + Bx) \quad r_1 = r_2$$

$$y = e^{ax}[A\cos bx + B\sin bx] \quad r = a \pm ib$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx}$$

Kopiereg voorbehou