higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N5

(16030175)

17 November 2022 (X-vraestel)
09:00–12:00

Wetenskaplike sakrekenaars mag gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 6 bladsye en 'n formuleblad van 5 bladsye.

071Q1E2217

Kopiereg voorbehou

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N5
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord al die vrae.
2. Lees al die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Toon alle tussenstappe en vereenvoudig waar moontlik.
5. Alle finale antwoorde moet tot DRIE desimale plekke afgerond word.
6. Vrae mag in enige volgorde beantwoord word, maar onderafdelings van vrae moet nie geskei word nie.
7. Sketse moet groot, netjies en ten volle benoem wees.
9. Skryf netjies en leesbaar.

Kopiereg voorbehou

VRAAG 1

Bepaal die volgende grense:

1.1 $y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln[\ln(x^2+1)]}{x}$ (4)

1.2 $y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{e^x - x - \frac{1}{2}x^2 - 1}$ (4)

[8]

VRAAG 2

2.1 Lei 'n formule af om $\frac{dy}{dx}$; if $y = arc\tan x$ te bepaal. (3)

2.2 Bereken $\frac{dy}{dx}$ van die volgende deur die afgeleide van $\sin x$ en $\cos x$, asook die differensiasiereëls te gebruik:

$y = \pi^{\log_\pi \cot x}$

WENK: $a^{\log_a x} = x$ (4)

2.3 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ in elk van die volgende gevalle:

(Vereenvoudiging word NIE vereis nie)

2.3.1 $y = \tan(x^3 \ln^2 x)$ (3)

2.3.2 $y = \dfrac{\sqrt{\ln(2x+3)}}{4\sqrt{3x-1}}$ (4)

2.4 Met behulp van logaritmiese differensiasie, bereken $\frac{dy}{dx}$ indien $y = (1 + \sin^{-1} x)^{\ln\cos x}$ (4)

2.5 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ van die implisiete funksie,

$\dfrac{2x-3y}{x+y} = 2x + y^2$ (5)

[23]

VRAAG 3

3.1 Gegee: $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 7x - 5$ ☆

3.1.1 Bepaal die koördinate van die draaipunte van $f(x)$. (3)

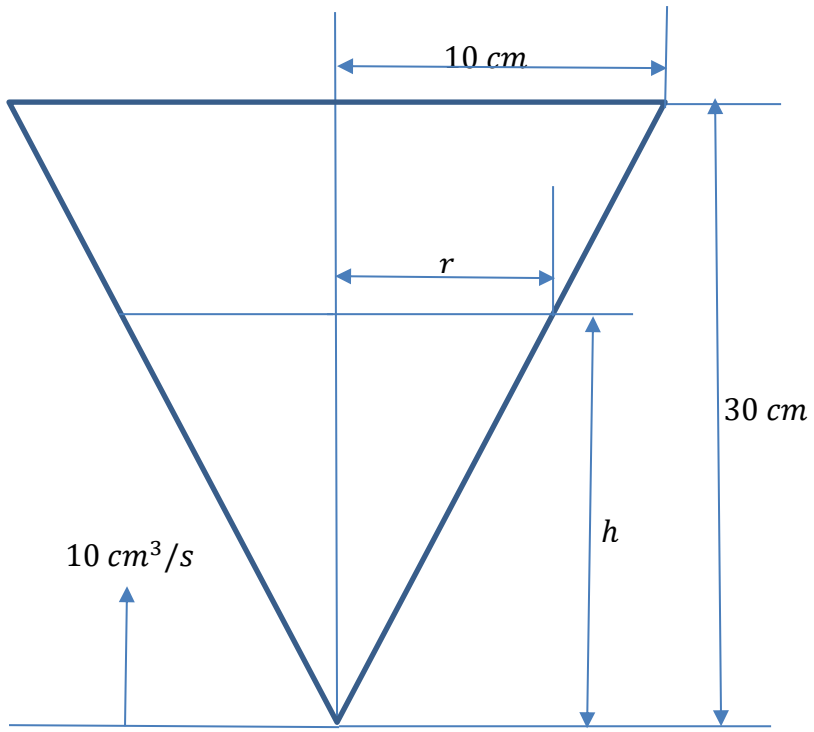
3.1.2 Stel 'n tabel van x en $f(x)$ op waar x wissel van $x = -3$ tot $x = 2$. (3)

3.1.3 Teken 'n netjiese grafiek van $f(x)$ tussen hierdie waardes en toon die draaipunte daarop. (2)

3.1.4 Gebruik die tabel en die grafiek om 'n waarde vir die wortel tussen $x = -1$ en $x = 0$ van die vergelyking $3x^3 + 5x^2 - 7x - 5 = 0$ te skat en gebruik dan Taylor/Newton se metode EEN keer om 'n beter benadering van hierdie wortel (korrek tot DRIE desimale plakke) te bepaal. ☆ (3)

3.2 Water word teen 'n tempo van 10 cm^3/s in 'n keëlvormige houer gegooi. Soos in die skets hier onder aangedui is, wys die keël direk afwaarts, het 'n hoogte van 30 cm en 'n basisstraal van 10 cm. Hoe vinnig styg die watervlak as die water by die diepste punt 4 cm diep is? Let daarop dat die skets hier onder nie volgens skaal geteken is nie.

HINT: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



(5)
[16]

☆

VRAAG 4

4.1 Bepaal $\int y\,dx$ in elk van die volgende gevalle:

4.1.1 $y = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ ☆ (3)

4.1.2 $y = \dfrac{2x^3 - 11x^2 - 9x + 10}{2x - 1}$ (5)

4.1.3 $y = x^2 e^{5x}$ (7)

4.1.4 $y = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}$ (4)

4.2 Bepaal $\int y\,dx$ deur die integraal in gedeeltelike breuke op te los:

$y = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 4x}$ ☆ (5)

[24]

VRAAG 5

5.1 Indien $f(1) = 3$ en $f(0) = 1$, evalueer dan $\int_0^1 f'(x)\,[f(x)]^2\,dx$ (4)

5.2 Gegee: $y = 5x - x^2$ and $y = x^2 - 2x + 1$

5.2.1 Bereken die koördinate van die snypunte. (2)

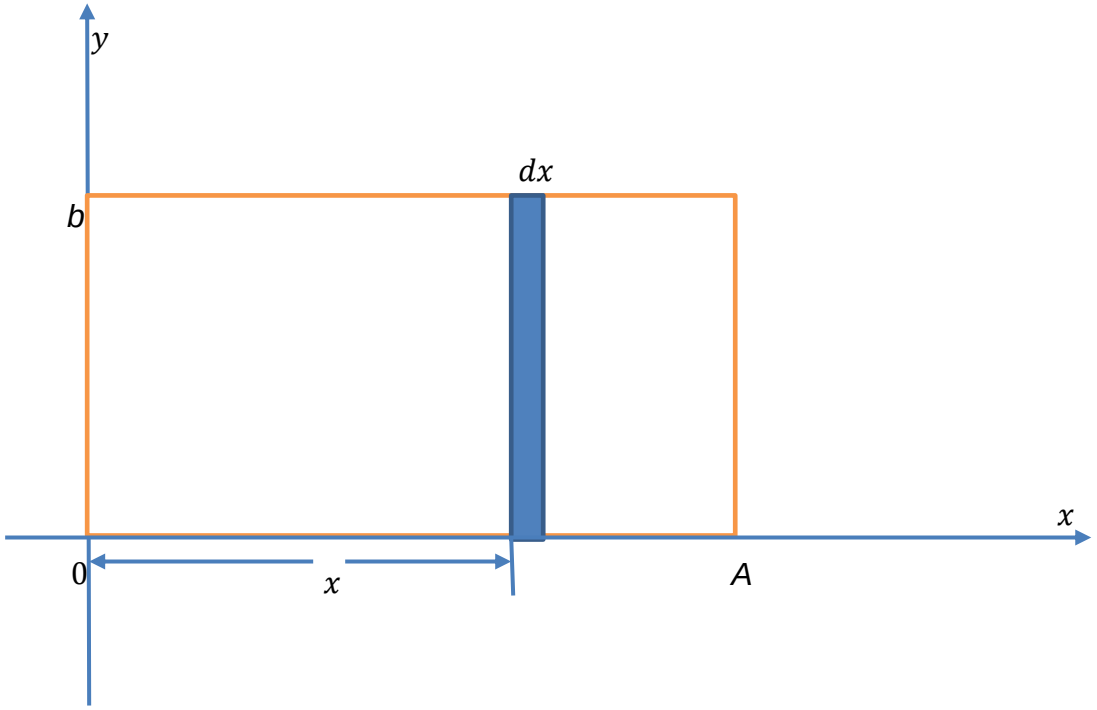
5.2.2 Maak 'n netjiese skets van die ingeslote area, die verteenwoordigende strook en die snypunt. ☆ (2)

5.2.3 Bereken die grootte van die oppervlakte in VRAAG 5.2.2. (3)

5.2.4 Bereken die volume van 'n omwentelingsliggaam wat gevorm word wanneer die oppervlakte in VRAAG 5.2.2 rondom die *x*-as roteer. (4)

Kopiereg voorbehou

5.3 Bepaal die inersiemoment van 'n reghoek met sye ***a*** en ***b*** ten opsigte van 'n as wat deur sy ***b*** gaan. Aanvaar dat die digtheid $\rho = 1$ is.



FIGUUR 1

(5)
[20]

VRAAG 6

6.1 Bepaal die algemene oplossing van:

$$(x-2)(y+1)\frac{dy}{dx} - \log_5(x-2) = 0$$

(3)

6.2 Bepaal die partikuliere oplossing van:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4 - 6x - 21x^2, \quad \text{if } \frac{dy}{dx} = y'(1) = 2 \text{ en } y(1) = 10$$

(6)
[9]

TOTAAL: 100

Kopiereg voorbehou

WISKUNDE N5

FORMULEBLAD

Enige toepaslike formule mag ook gebruik word.

TRIGONOMETRIE

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$\sin^2 A = ½ - ½ \cos 2A$

$\cos^2 A = ½ + ½ \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$$\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$\sin A \cos B = ½ [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = ½ [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = ½ [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = ½ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} ; \sin x = \frac{1}{\text{cosec } x} ; \cos x = \frac{1}{\sec x}$$

Kopiereg voorbehou

BINOMIAALSTELLING

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}\,h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\,h^2 + \ldots$$

DIFFERENSIASIE

$$e = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$r = a + e$$

PRODUKREËL

$$y = u(x)\,.\,v(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = u\,.\,\frac{dv}{dx} + v\,.\,\frac{du}{dx}$$

$$= u\cdot v' + v\cdot u'$$

KWOSIËNTREËL

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,.\,\frac{du}{dx} - u\,.\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2}$$

KETTINGREËL

$$y = f(u(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Kopiereg voorbehou

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)dx$
ax^n	nax^{n-1}	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$
A	0	$ax + c$
e^x	e^x	$e^x + c$
a^x	$a^x.\ln a$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\log_e x$	$\frac{1}{x}$	—
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	—
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + c$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln(\sec x) + c$
$\cot x$	$-\text{cosec}^2 x$	$\ln(\sin x) + c$
$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$	$\ln[\sec x + \tan x] + c$
$\text{cosec } x$	$-\text{cosec } x \cdot \cot x$	$\ln(\text{cosec} x - \cot x) + c$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	—
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	—
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	—
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	—
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	—
$\text{cosec}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	—

Kopiereg voorbehou

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	—	$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	—	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$	—	$\frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	—	$\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$
$\frac{1}{x^2 - a^2}$	—	$\frac{1}{2a} ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right) + c$
$\frac{1}{a^2 - x^2}$	—	$\frac{1}{2a} ln\left(\frac{a + x}{a - x}\right) + c$

INTEGRASIE

$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + c$$

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$$

$$\frac{f(x)}{(x+a)^n} = \frac{A}{(x+a)} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{(x+a)^3} + \cdots \frac{Z}{(x+a)^n}$$

Kopiereg voorbehou

TOEPASSINGS VAN INTEGRASIE

OPPERVLAKTE

$$A_x = \int_a^b y\,dx\,;\; A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$$

$$A_y = \int_a^b x\,dy\,;\; A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\,dy$$

VOLUME

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\,dx\,;\; V_x = \pi\int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right)dx$$

$$V_y = \pi\int_a^b x^2\,dy\,;\; V_y = \pi\int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right)dy$$

TWEEDE OPPERVLAKTEMOMENT

$$I_x = \int_a^b r^2\,dA\,;\; I_y = \int_a^b r^2\,dA$$

INERSIEMOMENTE

Massa = digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: I = m r2

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2\,dm = \rho\int_a^b r^2\,dV$

Kopiereg voorbehou